

Marcelina Mocanu

**LOGICĂ MATEMATICĂ ȘI
TEORIA MULȚIMILOR**



**EDITURA ALMA MATER
BACĂU
2020**

Cuprins

Prefață	v
1 Introducere	1
1.1 Logica uzuală și logica formală	1
1.2 Principiile Logicii clasice (bivalente)	2
1.3 Logici neclasice-dezvoltări ale logicii clasice	3
2 Logica propozițiilor	7
2.1 Noțiunea de propoziție în logică	7
2.2 Operații cu propoziții. Conectori logici	7
2.3 Formule propoziționale	13
2.3.1 Definiții	13
2.3.2 Tautologie, contradicție, contingentă	16
2.3.3 Echivalența formulelor propoziționale	16
2.4 Interpretarea formulelor propoziționale	19
2.5 Tautologii remarcabile	22
2.6 Reguli de substituție	23
2.7 Formule propoziționale restricționate	25
2.8 Forme normale ale formulelor propoziționale (conjunctivă, disjunctivă)	27
3 Logica predicatelor	31
3.1 Noțiunea de predicat în logică	32
3.2 Cuantificatori: universal, existențial	34
3.2.1 Propoziții universale, propoziții existențiale	34
3.2.2 Reguli de negație pentru cuantificatori	36
3.3 Predicate de mai multe variabile	39
3.3.1 Variabile libere, variabile legate. Ordinea cuantificato-	
rilor	40
3.3.2 Reguli de negație pentru cuantificatori aplicați succesiv	42
3.3.3 Cuantificatori și conectori logici	44
3.3.4 Exemple de utilizare a cuantificatorilor în enunțuri matem-	
atice	44
4 Mulțimi	47
4.1 Introducere	47
4.2 Relația de incluziune a mulțimilor	48

4.3	Operații cu mulțimi	51
4.3.1	Reuniune, intersecție, diferență	51
4.3.2	Proprietăți ale operațiilor cu mulțimi	53
5	Relații binare	59
5.1	Produs cartezian al două mulțimi	59
5.1.1	Definiție, exemple	59
5.1.2	Proprietăți ale produsului cartezian	61
5.1.3	Produs cartezian al n mulțimi	63
5.2	Relații binare. Definiții, exemple, proprietăți	64
5.2.1	Definiții, exemple	64
5.2.2	Tipuri remarcabile de relații binare pe o mulțime . . .	65
5.2.3	Matricea booleană asociată unei relații între două mulțimi finite	66
5.3	Relații de echivalență	67
5.3.1	Definiție, exemple	67
5.3.2	Clasa de echivalență a unui element	68
5.4	Relații de ordine	70
6	Funcții	73
6.1	Relații funcționale (Funcții)	73
6.1.1	Definiții, exemple	73
6.1.2	Imaginea/ imaginea inversă a unei mulțimi printr-o funcție	75
6.2	Funcții compuse	77
6.2.1	Compunerea a două relații	77
6.2.2	Compunerea a două funcții	78
6.3	Funcții injective, surjective, bijective	80
6.4	Inversa unei relații. Funcții inversabile	86
6.5	Relația de echipotență a mulțimilor	90
7	Mulțimea numerelor naturale	93
7.1	Axiomatica Peano a mulțimii numerelor naturale	93
7.2	Principiul inducției matematice	96
7.3	Aplicații ale principiului inducției matematice	100
7.3.1	Binomul lui Newton	100
7.3.2	Formula lui Leibniz pentru derivata de ordin n a unui produs	102
7.3.3	Aplicații ale Formei tari a principiului inducției matematice	104
7.4	Operații cu numere naturale	107
7.4.1	Adunarea numerelor naturale	107
7.4.2	Înmulțirea numerelor naturale	109
7.5	Relația de ordine uzuală pe mulțimea numerelor naturale	112
7.6	Proprietăți ale mulțimii numerelor naturale ca mulțime ordonată . . .	115

8	Numere cardinale	119
8.1	Mulțimi finite	119
8.1.1	Cardinalul unei mulțimi finite	119
8.1.2	Mulțimi finite și funcții injective, funcții surjective . .	121
8.1.3	Operații cu cardinalele mulțimilor finite	125
8.1.4	130
8.2	Operații cu numere cardinale	134
8.3	Compararea cardinalelor	136
8.3.1	Relația de ordine pe mulțimea cardinalelor	136
8.3.2	140
8.4	Mulțimi numărabile	142
8.4.1	Cardinalul mulțimii numerelor naturale	142
8.4.2	Mulțimi numărabile și mulțimi finite	144
8.4.3	Exemple de mulțimi numărabile	145
8.5	Operații cu mulțimi cel mult numărabile	150
8.6	Mulțimi nenumărabile. Puterea continuului	153
9	Elemente de teoria demonstrației	161
9.1	Argumente. Tipuri de argumente	161
9.2	Reguli de deducție în logica propozițiilor	163
9.3	Reguli de deducție în logica predicatelor	169
9.3.1	Reguli de deducție pentru enunțuri cu un cuantificator	169
9.3.2	Combinarea regulilor de deducție pentru propoziții și enunțuri cu un cuantificator	172
9.4	Erori de raționament	174
9.4.1	Erori de logică cauzate de argumente nevalide	174
9.4.2	Erori logice informale	177
9.5	Teoreme. Terminologie	177
9.6	Forme de reprezentare a unei teoreme	179
9.7	Demonstrații directe	181
9.8	Demonstrații indirecte	182
9.8.1	Contrapozitie versus reducere la absurd	182
9.8.2	Exemple de demonstrații bazate pe metoda contrapozitiei	184
9.8.3	Exemple de demonstrații bazate pe metoda reducerii la absurd	186
10	Axiomatizarea teoriei mulțimilor	189
10.1	Necesitatea unei teorii axiomatice a mulțimilor și a unui limbaj formal corespunzător	189
10.2	Antinomii remarcabile	190
10.2.1	Antinomii din teoria mulțimilor	190
10.2.2	Antinomii de limbaj (semantice)	190
10.3	Axiomatica Zermelo-Fraenkel	192

10.4	Axioma alegerii și axioma fundării	195
11	Probleme rezolvate	197
11.1	Logica uzuală	197
11.2	Logica propozițiilor	199
11.3	Logica predicatelor	203
11.4	Operații cu mulțimi	210
11.5	Relații	218
11.6	Funcții	227
11.7	Cardinale. Mulțimi echipotente	234
11.8	Inducția matematică	244
11.9	Argumente. Reguli de deducție	257
11.10	Teoreme. Elemente de teoria demonstrației	260
11.11	Test de verificare a cunoștințelor	265
12	Bibliografie și resurse disponibile online	269